Un'orbita per la Luna

Albino Carbognani, Ph.D.
Versione del 19 luglio 2019

Con questo breve articolo, scritto nel 50° anniversario del lancio della missione Apollo 11 verso la Luna, voglio mostrare come si può calcolare un'orbita che porti dalla Terra alla Luna usando, in gran parte, solo le semplici equazioni che derivano dalla interazione di due corpi legati dalla reciproca forza di gravità. Naturalmente si tratta di un'approssimazione della vera orbita seguita da Apollo 11 ma la realtà non è molto diversa. Per avere un'indicazione delle varie tappe di una missione Apollo vedi le figure 1 e 2.

A questo scopo faremo le seguenti assunzioni:

1. La Luna si muove su un'orbita circolare che giace sul piano dell'Eclittica (il piano dell'orbita eliocentrica terrestre) alla distanza $\boldsymbol{d}$ **= 384.400** km dal centro della Terra, impiegando un intervallo di tempo pari a **27,32166 giorni** per compiere un intero giro (**mese siderale**). La Luna si muove con una velocità v_c = 1,023 km/s rispetto alla Terra. La vera orbita della Luna è leggermente ellittica (e = 0,055) ed inclinata di circa 5,14° rispetto al piano dell'Eclittica.
2. L'orbita di trasferimento fra la Terra e la Luna è un'orbita di **Hohmann** che giace sul piano dell'orbita lunare.
3. La Terra è una sfera di raggio $\boldsymbol{R_E = 6371}$ **km**, massa $\boldsymbol{M_E = 5{,}97 \times 10^{24}}$ **kg** e l'orbita iniziale di parcheggio dell'astronave, prima di dirigersi verso la Luna, è circolare con una quota di 185 km sulla superficie terrestre.
4. La Luna è una sfera di raggio $\boldsymbol{R_M = 1737}$ **km**, massa $\boldsymbol{M_M = 7{,}35 \times 10^{22}}$ **kg** (circa 1/81 della Terra) e l'orbita di parcheggio finale dell'astronave è circolare e si trova a 100 km dalla sua superficie.
5. L'astronave ha una massa trascurabile rispetto sia alla Luna sia alla Terra.

Per ottenere un'indicazione dell'orbita di trasferimento che l'astronave dovrà percorrere per andare dalla Terra alla Luna useremo le equazioni per la **conservazione dell'energia**, la **III Legge di Keplero** e quella per la **sfera di Hill**. Per avere una stima della quantità di carburante necessaria per gli inevitabili passaggi da un'orbita all'altra useremo l'equazione per il **moto del razzo di Tsiolkovsky**, il padre dell'astronautica moderna.

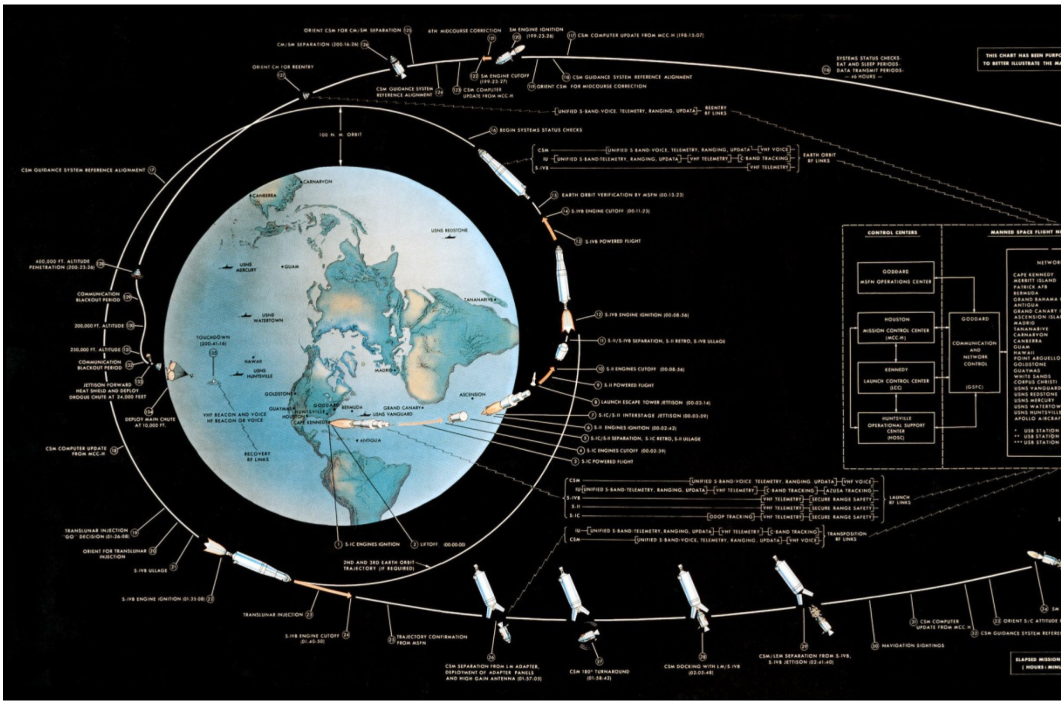

Figura 1 – **In basso**: parte iniziale della traiettoria seguita dalla missione Apollo 11: lancio, immissione in orbita circolare di parcheggio attorno alla Terra, accelerazione e immissione sull’orbita verso la Luna. **In alto**: la parte finale della missione Apollo con il rientro verso la Terra, lo sgancio del modulo di servizio, l’ingresso in atmosfera del modulo di comando e l’ammaraggio nel Pacifico (NASA, 1967).

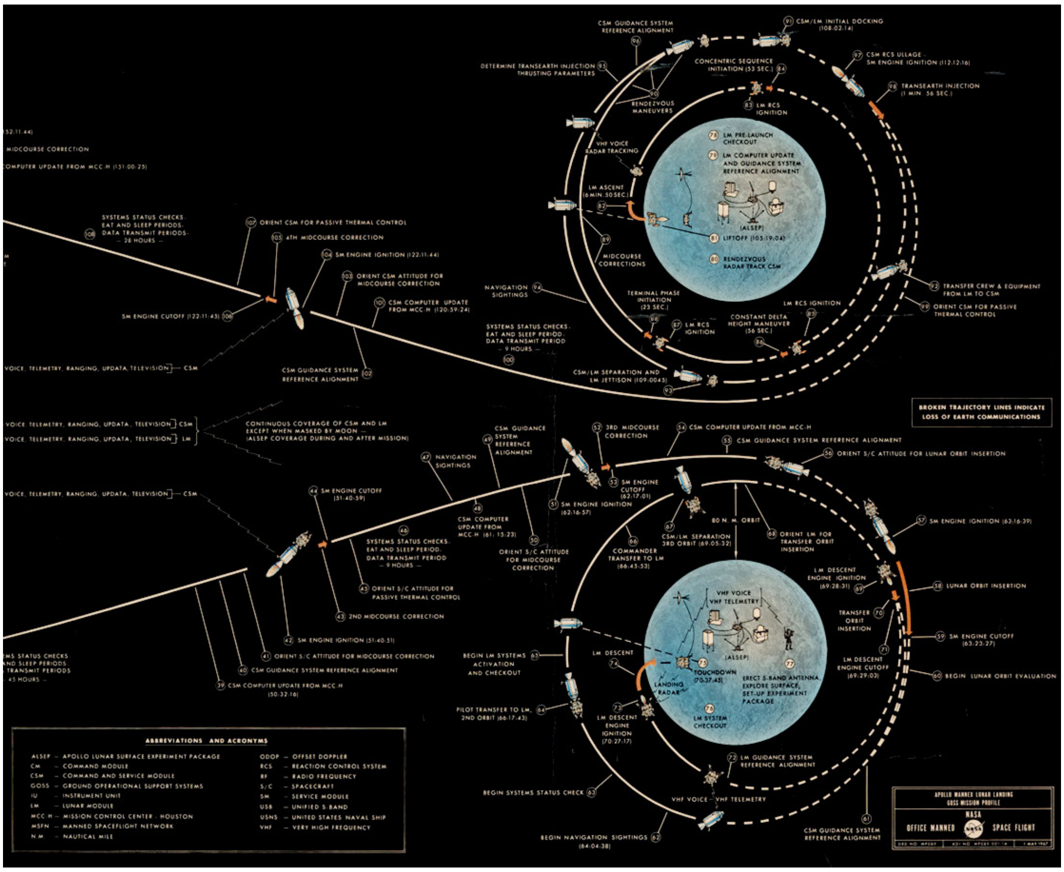

Figura 2 – **In basso**: arrivo dell’astronave Apollo in prossimità della Luna ed immissione in orbita con discesa del LM. **In Alto**: risalita del LM, uscita dall’orbita lunare e ritorno verso la Terra (NASA, 1967).

Conservazione dell’energia

L’equazione più importante per tracciare un’orbita di una missione lunare è quella che esprime la **conservazione dell’energia meccanica per unità di massa dell’astronave**. Qualunque sia la distanza r e la velocità v dell’astronave rispetto al corpo principale M (che può essere la Terra oppure la Luna), la somma dell’energia cinetica più quella potenziale è una costante:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \qquad (1)$$

Nella Eq. (1), valida per il moto di due corpi (di cui uno di massa trascurabile rispetto all’altro), sotto l’effetto della reciproca forza di gravità, le lettere hanno il seguente significato:

1. a è il **semiasse maggiore dell’orbita** percorsa dall’astronave attorno al corpo principale. L’orbita può essere ellittica, parabolica o iperbolica. La prima è un’orbita chiusa, le altre due sono aperte.
2. $\mu = GM$, dove $G = 6{,}672 \times 10^{-11}$ è la costante di gravitazione universale mentre M è la massa del corpo principale.
3. v è la velocità dell’astronave che si trova alla distanza r dal corpo principale (Terra o Luna che sia).

Dalla conservazione dell’energia, una volta nota la velocità v posseduta dall’astronave ad una certa distanza r dal corpo principale M, possiamo ottenere il valore del semiasse maggiore a, ossia il tipo di orbita che percorre l’astronave, indipendentemente dalla direzione del moto!

Se $a > 0$ l’orbita è legata al corpo principale, ossia **ellittica**. Infatti il 2° membro della Eq. (1) è sempre negativo quindi r non può assumere valori troppo elevati altrimenti μ/r diventa trascurabile rispetto a $v^2/2$, che è sempre positivo! Se $a = \infty$ l’orbita è **parabolica**, ossia l’astronave arriva dall’infinito con velocità nulla, fa un flyby e torna all’infinito con velocità nulla. Infine se $a < 0$ l’orbita è **iperbolica**, quindi l’astronave arriva dall’infinito con velocità maggiore di zero e torna all’infinito con la stessa velocità dopo il flyby. Come già sottolineato, gli ultimi due tipi di orbite sono **aperte**, ossia l’astronave si può allontanare indefinitamente rispetto al corpo principale. In questi ultimi due casi la costante a secondo membro della Eq. (1) può essere sostituita dall’**energia cinetica all’infinito dell’astronave** e l’equazione diventa:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}v_\infty^2 \qquad (1a)$$

Dalla Eq. (1) si ottiene subito la formula della **velocità dell’astronave nel caso di moto circolare** attorno al corpo principale, ossia quando $r \equiv a$:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \qquad (2)$$

Sempre dalla Eq. (1), lasciando il valore di r generico, si trova la formula della **velocità dell’astronave attorno al corpo principale nel caso di orbita ellittica, parabolica o iperbolica**:

$$v = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)} \qquad (3)$$

Considerato che per **un’orbita ellittica di eccentricità e**, di cui il corpo principale M occupa uno dei fuochi (I legge di Keplero), la distanza nel punto più vicino al corpo principale (**periastro**) è data da $\boldsymbol{r \equiv q = a(1-e)}$, allora dalla Eq. (3) la **velocità dell’astronave al periastro** è data da:

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} = v_c\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad (4)$$

Il valore di v_p è la velocità massima che l'astronave può avere lungo l'orbita di semiasse maggiore a. Nel punto diametralmente opposto al periastro, ossia all'**apoastro**, si raggiunge la distanza massima dal corpo principale, data da $\boldsymbol{r \equiv Q = a(1+e)}$. Con questa condizione, sempre dalla Eq. (3), ne deriva che la **velocità dell'astronave all'apoastro** è data da:

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} = v_c\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \qquad (5)$$

All'apoastro, $v_a < v_p$ è la minima velocità che l'astronave può assumere lungo l'orbita.

La III Legge di Keplero

Oltre alla conservazione dell'energia meccanica ci sarà utile la **III Legge di Keplero**, che lega il semiasse maggiore a dell'orbita percorsa dall'astronave con il periodo orbitale P, ossia l'intervallo di tempo impiegato per compiere un giro completo attorno al corpo principale M:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \qquad (6)$$

Dalla Eq. (6) si trova subito il periodo orbitale P dell'astronave:

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \qquad (7)$$

Nel caso dell'orbita di trasferimento fra la Terra e la Luna, l'intervallo di tempo necessario per percorrerla sarà pari a $P/2$.

La sfera di Hill

In generale per sfera di Hill si intende la **regione di influenza gravitazionale di un corpo celeste**. Se il corpo celeste fosse isolato nello spazio la sfera di Hill si estenderebbe all'infinito. Le cose cambiano nel caso dei sistemi primario-secondario, ossia stella-pianeta o pianeta-satellite. Infatti, immaginiamo un'astronave in volo inerziale che si allontana dal corpo secondario. A mano a mano che si allontana dal corpo di massa minore aumenta l'intensità della forza gravitazionale del primario e, ad un certo punto, il moto dell'astronave sarà determinato dal campo gravitazionale del primario e non più dal secondario.

Per sfera di Hill si intende quindi la sfera di influenza gravitazionale di un corpo celeste rispetto alle perturbazioni di un altro corpo, di massa maggiore, attorno al quale esso orbita. Per il sistema Terra-Luna il raggio di questa sfera è dato da:

$$R_H \approx d\sqrt[3]{\frac{M_M}{3M_E}} \qquad (8)$$

La sfera di Hill della Luna rispetto alla Terra vale quindi $\boldsymbol{R_H}$ **≈ 61.600 km** dal centro della Luna. Il concetto di sfera di Hill è importante perché ci aiuterà a capire quando si passa da un'orbita di trasferimento geocentrica, in cui domina la gravità terrestre, ad un'orbita selenocentrica, in cui domina la gravità lunare e viceversa.

L'equazione del razzo

L'ultima equazione che esaminiamo è **l'equazione del razzo di Tsiolkovsky**. Questa equazione descrive il moto di un razzo, ossia di un corpo che si muove in una direzione espellendo massa ad alta velocità (gas caldi nel caso del razzo chimico), nella direzione opposta. L'equazione di Tsiolkovsky descrive quindi il moto di un corpo la cui **massa diminuisce nel tempo** con un conseguente progressivo aumento dell'accelerazione. Nel caso di un razzo libero nello spazio la variazione di velocità ΔV che si ottiene espellendo una certa massa alla velocità $\boldsymbol{V_e}$ rispetto al razzo è:

$$\Delta V = V_e \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \quad (9)$$

Nella Eq. (9) m_i è la massa iniziale del razzo, mentre m_f è la massa finale, dopo la combustione e l'espulsione dei gas ad alta temperatura. Nel caso di un razzo chimico alimentato con ossigeno ed idrogeno liquidi la **velocità di espulsione dei gas combusti rispetto al razzo è di circa 3,8 km/s**, valore che assumeremo per V_e. Notare che la funzione logaritmica cresce molto lentamente all'aumentare del rapporto m_i/m_f, quindi bisogna avere rapporti di massa elevati – a parità della velocità di espulsione dei gas di scarico - per ottenere un aumento non trascurabile della velocità. Ad esempio, con un rapporto massa iniziale/finale pari a 10 la velocità del razzo aumenta di 8,75 km/s giusto quello che serve, al netto di attrito e accelerazione di gravità, per entrare in orbita bassa attorno alla Terra. Dalla Eq. (9) si può ottenere il rapporto massa finale/iniziale necessario per avere la variazione voluta della velocità dell'astronave:

$$\frac{m_f}{m_i} = e^{-\Delta V / V_e} \quad (9a)$$

In orbita verso la Luna

Ora che abbiamo passato in rassegna la matematica di base sulle orbite e i razzi applichiamola per calcolare una traiettoria verso la Luna. La nostra astronave è in parcheggio su un'orbita circolare geocentrica ad una quota di 185 km dalla superficie terrestre (Fig. 1). La velocità circolare con cui si muove l'astronave è data dalla Eq. (2) e risulta $\boldsymbol{v_c}$ **= 7,79 km/s**. Come abbiamo visto prima, per arrivare in orbita bassa (LEO, Low Earth Orbit) il razzo ha ridotto la sua massa di circa 10 volte rispetto al valore di partenza. Il Saturn V otteneva questo risultato usando i primi due stadi dei tre stadi complessivi da cui era composto. Il terzo stadio serviva per accelerare l'astronave verso la Luna facendola uscire dall'orbita di parcheggio.

Ora vogliamo usare la minore quantità possibile di carburante e decidiamo di percorrere un'orbita di **Hohmann**, ossia un arco di ellisse con il periastro q coincidente con l'orbita geocentrica di parcheggio dell'astronave e l'apoastro Q all'interno della sfera di Hill della Luna, diciamo a 50.000 km dal nostro satellite, in modo che all'arrivo il moto dell'astronave sia condizionato dalla forza di gravità lunare invece che dalla gravità terrestre. Quindi possiamo ottenere il semiasse maggiore a e l'eccentricità e della nostra **orbita di trasferimento** se imponiamo le due condizioni seguenti:

$$\begin{cases} q = a(1-e) \\ Q = a(1+e) \end{cases} \quad (10)$$

Con q = 6371 + 185 = 6.556 km e Q = 384.400-50.000 = 334.400 km. Dal sistema di Eq. (10), eliminando il semiasse maggiore dell'orbita, si trova subito l'eccentricità dell'orbita di trasferimento:

$$e = \frac{Q-q}{Q+q} \quad (11)$$

Quindi per l'orbita di Hohmann di trasferimento verso la Luna e = **0,9615**. Con questo valore dell'eccentricità e dalla prima delle (10) segue il semiasse maggiore dell'orbita: a = **170.478 km**. Queste sono le caratteristiche geometriche della nostra orbita cislunare. Dalla III Legge di Keplero si trova subito l'intervallo di tempo per andare dal periastro all'apoastro (Eq. (7)): $P/2$ = **350378,3 s = 4,055 giorni** un valore dello stesso ordine di grandezza di quello effettivamente sperimentato dagli astronauti di Apollo 11.

Per la transizione fra **l'orbita circolare di parcheggio** e quella di **trasferimento verso la Luna** dobbiamo aumentare la nostra velocità. Infatti, dalla Eq. (4), la velocità al periastro dell'orbita di trasferimento deve essere v_p = **10,91 km/s**. Quindi, rispetto all'orbita di parcheggio c'è una differenza di velocità ΔV = 10,91 - 7,79 = 3,12 km/s. **Questo aumento di velocità di circa 3,1 km/s si ottiene accendendo il razzo per un breve intervallo di tempo**. Per l'equazione del razzo (9a) il rapporto fra la massa finale ed iniziale vale m_f/m_i = 0,44 ossia il razzo deve espellere una quantità di massa pari al 56% della massa totale dell'astronave in orbita di parcheggio attorno alla Terra. Solo così l'astronave avrà la velocità necessaria per inserirsi sull'orbita di trasferimento verso la Luna. Notare che la velocità al periastro dell'orbita di trasferimento è vicinissima alla velocità di fuga della Terra di circa 11,2 km/s, quindi la velocità impressa dal razzo deve essere dosata con precisione altrimenti, se eccessiva, si rischia di uscire dal sistema Terra-Luna.

Quando si parte?

L'aumento impulsivo di velocità per passare dall'orbita di parcheggio a quella di trasferimento deve essere fatta quando la Luna impiegherà un tempo $P/2$ per raggiungere l'apoastro in modo da trovarsi a 50.000 km dall'astronave. Quindi il raggio vettore Terra-Luna deve formare un angolo α = (360°/27,32166)*(*4,055*) = 53,43°con la **linea degli apsidi**, ossia la retta periastro-apoastro dell'orbita di trasferimento geocentrica. In termini pratici, se si parte quando la Luna ha passato la congiunzione con il Sole da 2,8 giorni si arriverà in prossimità del nostro satellite attorno alla fase di primo quarto. Arrivare a destinazione attorno ad una fase vicina al primo quarto e atterrando sulla faccia della Luna visibile da terra, in una zona prossima al **terminatore mattutino** (ossia dove il Sole sta sorgendo), permette: 1) di avere le comunicazioni radio con la Terra e 2) delle belle ombre proiettate dai rilievi lunari che saranno utilissime per permettere agli astronauti di orientarsi a vista durante la discesa verso la superficie lunare.

Inserimento in orbita lunare

Una volta giunti in prossimità dell'apoastro a circa 50.000 km dalla Luna, l'astronave avrà una velocità, relativa alla Terra, data dalla Eq. (5), ossia pari a v_a = **0,214 km/s**. Astronave e Luna in prossimità dell'apoastro viaggiano circa nella stessa direzione, concorde con il moto orbitale della Luna. La Luna però si sposta lungo la sua orbita a 1,023 km/s quindi la velocità dell'astronave relativa alla Luna è v_∞ = 0,214 - 1,023= -0,809 km/s. L'astronave è leggermente più lenta del nostro satellite e rischia di restare indietro. Tuttavia noi vogliamo inserirci in orbita oraria attorno alla Luna (se vista dal polo nord dell'Eclittica), in modo tale che il modulo lunare possa arrivare a destinazione restando sempre sulla superficie lunare illuminata dal Sole: siamo al primo quarto e il modulo lunare deve atterrare vicino al terminatore così da vedere ombre abbastanza lunghe che caratterizzino il rilievo! Quindi una breve accensione del motore a razzo potrà rendere positivo il valore di v in modo da superare leggermente la Luna e iniziare la caduta su traiettoria iperbolica, che sarà percorsa in senso orario, verso il nostro satellite. Vogliamo ottenere v_∞ = 0,5 km/s rispetto alla Luna. Per fare questo bisogna aumentare la velocità di 1,3 km/s e il rapporto massa finale/massa iniziale deve essere m_f/m_i = 0,71, con una perdita di massa del 29%. A questa condizione ci si può arrivare anche con piccole correzioni di traiettoria successive fatte prima di arrivare all'apoastro.

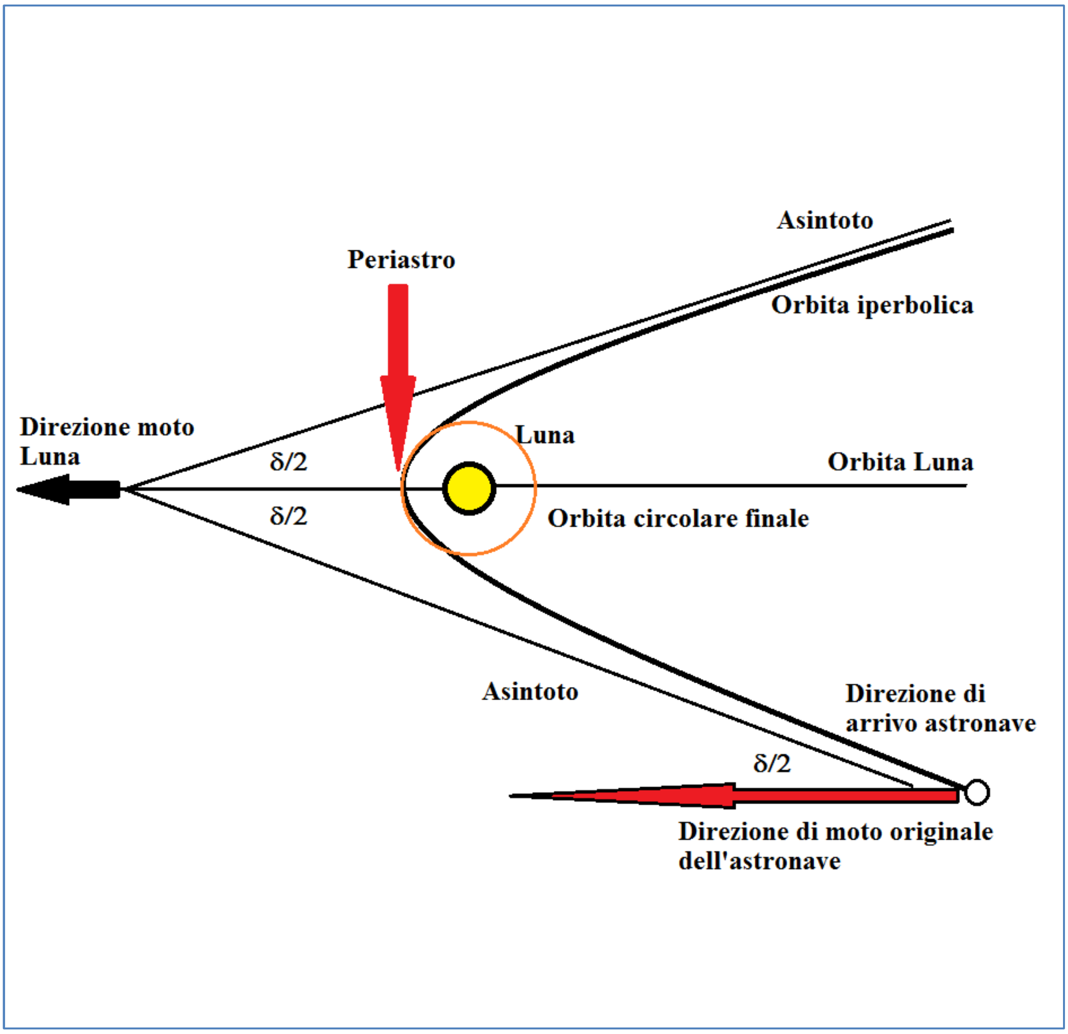

Figura 3 – Schema che mostra l'inserimento in orbita lunare dell'astronave.

L'astronave è all'interno della sfera di Hill della Luna, quindi ora domina la gravità del nostro satellite, e inizia la caduta verso la Luna partendo da v_∞ = 0,5 km/s. L'eccentricità $e > 1$ di un'orbita iperbolica è data da:

$$e = \frac{q v_\infty^2}{\mu} + 1 \quad (12)$$

Nella Eq. (12) q è la distanza dell'orbita al periastro (ossia il punto di minima distanza dal corpo celeste) e v_∞ è la velocità all'infinito. Nel nostro caso vogliamo passare al periastro a 100 km dalla superficie lunare quindi $q = R_M + 100 = 1837$ km, inoltre $\mu = GM_M$. Dalla Eq. (12) si trova e = 1,094. Dal valore dell'eccentricità si ottiene l'angolo di apertura δ della traiettoria iperbolica, ossia l'angolo formato dagli asintoti dell'iperbole. La metà di questo angolo è quello che la traiettoria di avvicinamento dell'astronave, che si trova praticamente all'infinito rispetto alla Luna, deve formare con l'orbita lunare per seguire un'iperbole dell'eccentricità voluta. Si trova δ/2 = $acos(1/e)$ = 23,9°. Quindi nella correzione di velocità precedente, oltre a cambiare il modulo del vettore velocità, dobbiamo anche cambiarne la direzione ruotandolo di 23,9° verso la Luna. L'astronave, rispetto alla Luna, si muoverà su un'orbita iperbolica con una velocità v che alla generica distanza r dalla Luna è data dalla Eq. (1a):

$$v = \sqrt{2\left(\frac{v_\infty^2}{2} + \frac{\mu}{r}\right)} \qquad (13)$$

Se la direzione di moto all'infinito era quella corretta l'astronave arriverà alla distanza di 100 km dalla superficie lunare al periastro, con una velocità che è data dalla Eq. (13), ossia v = 2,36 km/s. Tuttavia la velocità circolare per restare in orbita selenocentrica a 100 km di quota è data dalla Eq. (2) e vale v_c = 1,63 km/s quindi **il razzo dell'astronave deve ridurre la velocità** della quantità ΔV = 2,36 − 1,63 = 0,73 km/s. Questo rallentamento per l'immissione in orbita lunare comporta un rapporto di massa m_f/m_i = 0,82 ossia ci si può immettere in orbita circolare espellendo il 18% circa della massa rimanente dell'astronave.

Il rientro verso la Terra

Una volta completata la missione sulla superficie, si può ripartire verso la Terra seguendo le tappe di andata a rovescio. Quindi si aumenta la velocità per uscire dall'orbita lunare e portarsi su un'orbita iperbolica rispetto alla Luna. Una volta usciti dalla sfera di Hill lunare si corregge traiettoria e velocità in modo da trovarsi su un'orbita di Hohmann verso la Terra. Chiaramente, all'arrivo in prossimità della Terra, l'astronave avrà la stessa velocità con cui era partita verso la Luna, ossia circa 10,9 km/s. Questo è un problema perché il carburante per le correzioni orbitali è terminato e **non si può rallentare per entrare in orbita di parcheggio**. Per questo motivo si entra direttamente nell'atmosfera terrestre, lasciando alla **resistenza aerodinamica** il compito di rallentare l'astronave (aumentando la temperatura dello scudo termico…), fino ad una velocità di alcune centinaia di km/h, velocità a cui si possono aprire i paracadute per scendere senza rischi verso la superficie.

Bibliografia

Theodore E. Sterne, **An introduction to celestial mechanics**, Interscience Publishers, 1960.